

ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA - OPTATIVO				
U. A.:	La Paz		Asignatura:	CÁLCULO II
Fecha:	La Paz, 12 de Noviembre de 2014		Docente:	
Ap. Paterno:			Ap. Materno:	
Nombres:			C.I.:	
Paralelo:			FIRMA	
Ponderación del Examen			NOTA	
Ponderación Ev. Continua				

RECOMENDACIONES

1. Prohibido el uso de teléfonos móviles (Celulares) y calculadora durante el desarrollo del examen. **SU USO SE CONSIDERA FRAUDE EN EXAMEN.**
2. Prohibido el uso de ayudas memorias para el examen. **SU USO SE CONSIDERA FRAUDE EN EXAMEN.**
3. Tiempo de duración para este examen es de **90 min.**
4. Lea cuidadosamente la pregunta y **responda a detalle con letra clara.**

DESCRIPCIÓN DEL EXAMEN

1. (25 Pts.) Calcular la longitud total de la Astroide definida como:

$$\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{2} \cos^3 t, \frac{1}{2} \sin^3 t\right) \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]$$

2. (25 Pts.) Hallar la torsion y el plano osculador si $\vec{f}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ para $t = 0$
3. (25 Pts.) Analizar si la expresión

$$\left(\frac{1}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$$

es diferencial exacta, si es así, hallar la función de la cual procede.

4. (25 Pts.) Probar que la función:

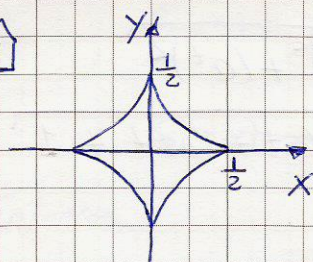
$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

verifica la ecuación de Laplace.

(Ayuda. La ec. de Laplace es: $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$)

Solucionario

1



Como $\vec{P}(t) = (\frac{1}{2} \cos^3 t, \frac{1}{2} \sin^3 t)$

$$\Rightarrow \vec{P}'(t) = \left(\frac{3}{2} \cos^2 t (-\sin t), \frac{3}{2} \sin^2 t (\cos t) \right)$$

$$\Rightarrow \vec{P}'(t) = \frac{3}{2} \sin t \cos t (-\cos t, \sin t)$$

$$\Rightarrow \|\vec{P}'(t)\| = \frac{3}{2} |\sin t \cos t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$\|\vec{P}'(t)\| = \frac{3}{2} |\sin t \cos t|$$

Como la curva de la Astroide es simétrica, calculamos la longitud en el primer cuadrante $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ y luego multiplicamos por 4.

i.e. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \sin t \cos t dt$

pues $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow |\sin t \cos t| = \sin t \cos t.$$

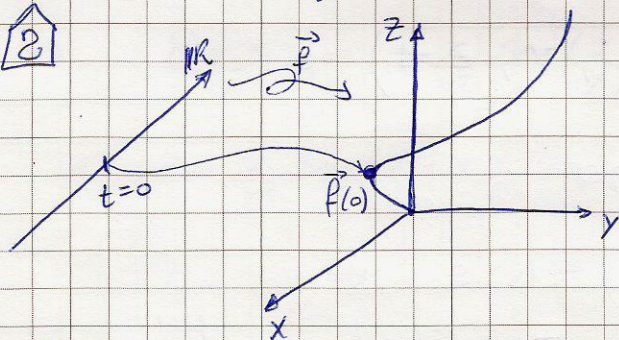
$$= \frac{3}{4} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{4} \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{3}{4}$$

Así la longitud total de la astroide es: $4L = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

2



donde $\vec{P}(0) = (1, 0, 1)$

$$\vec{P}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t) \Rightarrow \boxed{\vec{P}'(0) = (1, 1, 1)}$$

$$\vec{P}''(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t, e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t, e^t)$$

$$\vec{P}''(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t) \Rightarrow \boxed{\vec{P}''(0) = (0, 2, 1)}$$

$$\vec{P}'''(t) = (-2e^t \sin t - 2e^t \cos t, 2e^t \cos t - 2e^t \sin t, e^t) \Rightarrow \boxed{\vec{P}'''(0) = (-2, 2, 1)}$$

Entonces: $\vec{P}'(0) \times \vec{P}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2)$

$$\Rightarrow \|\vec{P}'(0) \times \vec{P}''(0)\|^2 = 6 \quad \text{y} \quad [\vec{P}'(0) \times \vec{P}''(0)] \cdot \vec{P}'''(0) = (-1, -1, 2) \cdot (-2, 2, 1) = 2$$

$$\Rightarrow \kappa(0) = \frac{[\vec{P}'(0) \times \vec{P}''(0)] \cdot \vec{P}'''(0)}{\|\vec{P}'(0) \times \vec{P}''(0)\|^2} = \frac{2}{6} \Rightarrow \kappa(0) = \frac{1}{3}$$

Para el plano osculador.

$$\begin{aligned}\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} \\ &= e^t \sqrt{\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + 2 \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + 1} \\ &= e^t \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1} \\ &= e^t \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(t) = \left(\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}, \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\Rightarrow T(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\gamma \quad T'(t) = \left(\frac{-\sin t - \cos t}{\sqrt{3}}, \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{3}}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow T'(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) \Rightarrow \|T'(0)\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Como } B(0) = \frac{T'(0)}{\|T'(0)\|} \Rightarrow B(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

La ec. del plano osculador es: (Para $t=0$)

$$B(0) \cdot [x, y, z] - (1, 0, 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0$$

$$-x + 1 + y = 0$$

$$\boxed{x - y = 1}$$

← Ec. del plano osculador.

3

Sea

$$P(x, y) = \frac{1}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}$$

Entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3} \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\text{Como } \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

$\therefore$ es una diferencial exacta.

De donde:

$$f(x, y) = \int P(x, y) dx + g(y) \quad ; \quad g(y) \text{ es función que sólo depende de } y.$$

$$\Rightarrow f = \int \left[\frac{1}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + 1 \right] dx + g(y)$$

$$f(x, y) = -\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + g'(y) = Q(x, y)$$

$$\text{i.e.} \quad -\frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + g'(y) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{x}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$\text{o} \quad dg(y) = \frac{1}{y^2} dy$$

$$\text{Integrando} \quad g(y) = -\frac{1}{y}$$

$$\text{Así } f(x, y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{x}{y}\right) + x - \frac{1}{y}$$

4

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f_x = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_{xx} &= \frac{- (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} + x \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} (3x^2 - (x^2 + y^2 + z^2))}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \end{aligned}$$

$$f_{xx} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Por el principio de simetría, se deduce que:

$$f_{yy} = \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} ; f_{zz} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

de donde:

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 - x^2 - z^2 + 2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0$$

$$\text{i.e.} \quad f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$$

$\therefore f$ cumple la ec. de Laplace.

